Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica
Area de Ciencias Básicas y Humanidades

P.A. 2007-3
15-03-2008

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN FINAL

DE CÁLCULO NUMÉRICO (MB535)

DURACION: 120 MINUTOS

SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO

ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS

Problema 1

a) Al resolver el problema del spline cúbico por comodidad se llega a una solución del tipo: $S_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0$, escriba una función en Matlab que permita expresar este polinomio en la forma estándar de series de potencia:

$S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con la siguiente cabecera:

function [a,b,c,d]=cambia(a0, b0, c0, d0, x0)

Solución

function [a,b,c,d]=cambia(a0, b0, c0, d0, x0)

p=a0*poly([x0 x0 x0]) + [0 b0*poly([x0 x0])] + [0 0 c0*poly(x0)] + [0 0 0 d0];

a=p(1); b=p(2); c=p(3); d=p(4);

b) Considera una función f(x) suficientemente diferenciable de la cual conocemos sus valores en los puntos x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_3 = x_0 + 3h$. Construya las formulas de diferencias finitas que aproximen los valores de las derivadas $f'(x_3)$ y $f''(x_3)$ utilizando todos los puntos proporcionados e indica el orden de error de las mismas.

Solución

Desarrollando las derivadas en torno a x_3:
$f(x_1) = f(x_3 - 2h) = f(x_3) - 2hf'(x_3) + (2h)^2 f''(x_3)/2 + O(h^3)$ ..(I)
$f(x_0) = f(x_3 - 3h) = f(x_3) - 3hf'(x_3) + (3h)^2 f''(x_3)/2 + O(h^3)$ ..(II)

de (I):
$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} + O(h)$$
de (II):
$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{3h} + O(h)$$

Haciendo: 3*(I)-2*(II)

$$f''(x_3) = \frac{-3f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_3)}{3h^2} + O(h)$$

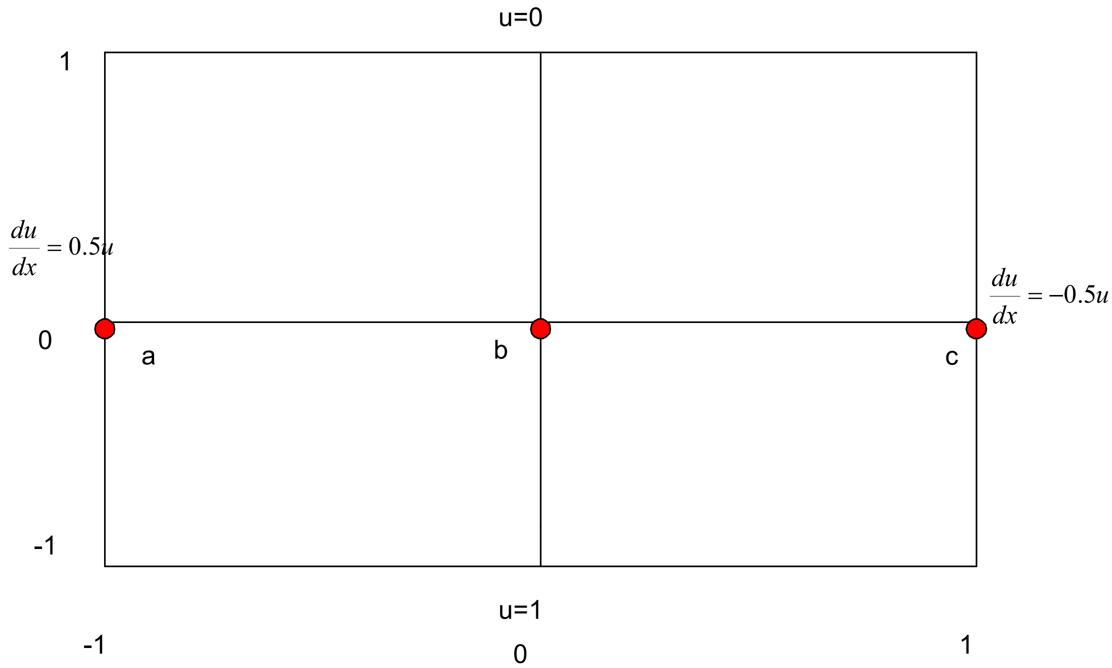
c) Plantee las ecuaciones por diferencias finitas para el siguiente problema:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10u = 0$, definido en el cuadrado a= -1,b=1, c= -1, y d=1, con las siguientes condiciones frontera:

- u=0 para y=1, $-1 \le x \le 1$
- u=1 para y= -1, $-1 \le x \le 1$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -0.5u$ para $x = 1$, $-1 < y < 1$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = +0.5u$ para $x = -1$, $-1 < y < 1$

Utilice una malla con $\Delta x = \Delta y = 1$

Solución



Nodo a

$$0 + ub + 1 + \bar{a} - 4ua = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{ub - \bar{a}}{2} = 0.5\,ua$$

$$\bar{a} = ub - ua$$

$$2ub + 1 - 5ua = 0$$

Nodo b

$$0 + uc + 1 + ua - 4ub = 0$$

Nodo c

$$0+\bar{c}+1+ub-4uc=0$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\bar{c}-ub}{2}=-0.5uc$$

$$\bar{c}=ub-uc$$

$$1+2ub-5uc=0$$

$$\begin{bmatrix}-5 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ua\\ ub\\ uc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

Problema 2

La resistencia a la compresión del concreto, σ, disminuye con el aumento de la relación agua / cemento, $\frac{w}{c}$ (en galones de agua por saco de cemento). La resistencia a la compresión de algunas muestras para varias razones de $\frac{w}{c}$ se dan en la siguiente tabla:

$\frac{w}{c}$	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
σ	7000	6125	5237	4665	4123	3810	3107	3070	2580	2287

a) Usando el método de mínimos cuadrados, ajuste σ a los datos, utilizando una función del tipo: $k_1 e^{-k_2\frac{w}{c}}$.

b) Encuentre el máximo error de los valores tabulados.

c) Es adecuado el ajuste?

Solución

a)

$$y=k_1e^{-k_2x}$$

$$Ln(y)=-k_2x+Ln(k_1)$$
$$Y=AX+B$$

X=x Y=Ln(y)

4.5000	8.8537
5.0000	8.7201
5.5000	8.5635
6.0000	8.4478
6.5000	8.3243
7.0000	8.2454
7.5000	8.0414
8.0000	8.0294
8.5000	7.8555
9.0000	7.7350

Aplicando un ajuste por mínimos cuadrados lineal se tiene:

Y= -0.2435 X + 9.9253

Luego:

k1 = 2.0440e+004

k2 = 0.2435

b) Calculo del Máximo error:

x	$\hat{y} = k_1 e^{-k_2 x}$	y	err
4.5	6832.9	7000	167.1
5.0	6049.6	6125	75.4
5.5	5356.1	5237	119.1
6.0	4742.2	4665	77.2
6.5	4198.6	4123	75.6
7.0	3717.3	3810	92.7
7.5	3291.2	3107	184.2
8.0	2913.9	3070	156.1
8.5	2579.9	2580	0.1
9.0	2284.2	2287	2.8

El máximo error es 184.2

c) El Factor de regresión es: R^2=0.9651

El ajuste es aceptable

Problema 3

Para la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

a) Hallar I usando el método de Simpson 1/3 compuesto para 6 intervalos.
b) Hallar I usando la formula de Newton-Cotes abierta de tercer grado con cinco particiones.
c) Calcule el número mínimo de intervalos para que el error sea no mayor a 10^{-4} mediante la fórmula de trapecio compuesta.

Solución:

a) Aplicando:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right)$$

h=1/3

I=1.494

b) Aplicando:

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{24}\left(11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)\right)$$

I=1.439

c) Aplicando:

$$E \leq \frac{b-a}{12}h^2 \max_{z\in(a,b)} |f''(z)|$$

Donde: $f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$

Quedando:

$E \leq h^2/3$

$h \leq \sqrt{3} * 10^{-2}$

H=(b-a)/N

N>=115 intervalos

Problema 4

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$u''(t) = -1 - u(t)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

a) Realice el método del disparo hasta encontrar $u(1,s_2)$ usando el método del disparo. Para sus cálculos auxiliares use Euler con h=0.25.
b) Realice el método de las diferencias finitas con el mismo paso anterior.

c) Compare los dos métodos usando porcentaje de error y diga cuál de los dos recomendaría para resolver este problema.

Nota: solución exacta $y(t) = -\frac{\sin t(\cos t - 1)}{\sin(1)} + \cos t - 1$

Solución

Método del Disparo

Algoritmo de Euler con h=0.25

Método de la Secante

y =

0	0
0	-0.25000000000000
-0.06250000000000	-0.50000000000000
-0.18750000000000	-0.73437500000000
-0.37109375000000	-0.93750000000000

y =

0	0.37109375000000 =s1
0.09277343750000	0.12109375000000
0.12304687500000	-0.15209960937500
0.08502197265625	-0.43286132812500
-0.02319335937500	-0.70411682128906

y =

0	0.39583333333333 =s2
0.09895833333333	0.14583333333333
0.13541666666667	-0.12890625000000
0.10319010416667	-0.41276041666667
-0.00000000000000	-0.68855794270833

Usando Diferencias finitas:

0	0
0.25000000000000	0.10467706013363
0.50000000000000	0.14031180400891
0.75000000000000	0.10467706013363
1.00000000000000	0

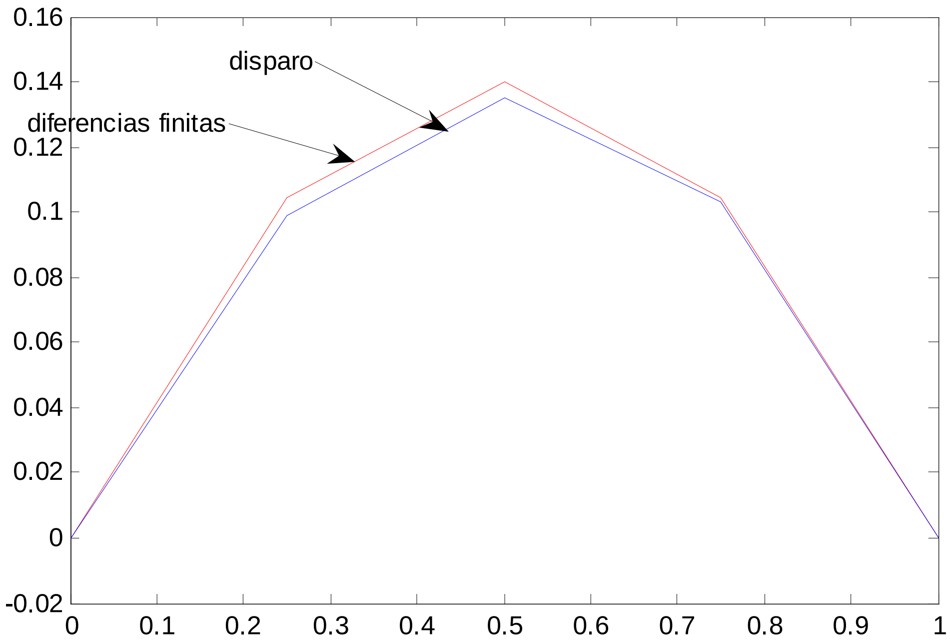


Tabla de errores absolutos:

Disparo	Diferencias
0.	0.
.51115e-2	-.6072e-3
.40773e-2	-.8179e-3
.87972e-3	-.6072e-3
.31503e-14	0.

Los Profesores